

➤ Définition :

Soit n un entier naturel non nul

La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0; +\infty[$

elle admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$, nommée racine n-ième

et que l'on note $\sqrt[n]{}$ et on a : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

➤ Propriétés:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$

➤ Ensemble de définition :

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0 \right\}$$

➤ Limites:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$		$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$\ell \geq 0$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{\ell}$
$+\infty$		$+\infty$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ Continuité :

Si f une fonction définie, positive et continue sur un intervalle I
alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I

➤ **Dérivée :**

Si u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I
alors la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{u(x)} \right)' = \frac{u'(x)}{n \sqrt[n]{u(x)}^{n-1}}$

➤ **Résolution de l'équation** $x \in \mathbb{R} \quad x^n = a \quad (a \in \mathbb{R}) :$

	n un entier naturel impair	n un entier naturel pair non nul
$a > 0$	$S = \left\{ \sqrt[n]{a} \right\}$	$S = \left\{ -\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a} \right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \left\{ -\sqrt[n]{ a } \right\}$	$S = \emptyset$

➤ **Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif:**

Soit un x réel strictement positif et un r nombre rationnel

On pose $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$)

On a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

➤ **Remarques :**

- $\sqrt[n]{u(x)} = \left(u(x) \right)^{\frac{1}{n}}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)} \right)' = \left(\left(u(x) \right)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} \times \left(u(x) \right)' \times \left(u(x) \right)^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous réels x et y positifs et pour tous rationnelles r et r'

• $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$

• $\left(x^r \right)^{r'} = x^{r \times r'}$

• $\left(x \times y \right)^r = x^r \times y^r$

• $\left(\frac{x}{y} \right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

• $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$

• $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$